MINES - PONTS - TELECOMM 1980

OPTIONS M, P' ET TA - 1ERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M, P' et TA, comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

RAPPEL : $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble de tous les réels, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels différents de 0,

Soit f une fonction donnée définie dans $\mathbb{R}^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; on considère la série de terme général $u_n(x)$:

$$u_n(x) = f(n+x) - f(n). \quad n = 1,2,\ldots$$

Si pour $x \in \mathbb{R}$, cette série est convergente, on considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

On étudie les propriétés de F connaissant certaines propriétés de f.

PREMIERE PARTIE

1°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante (C_1) portant sur f, pour que le nombre F(1) existe. Etudier dans chacun des exemples suivants, si la condition (C_1) est satisfaite et calculer F(1) lorsque ce nombre existe :

$f_1 : x \rightsquigarrow \left(\frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\alpha}\right)^x$ α réel donné

$f_2 : x \rightsquigarrow \sin[(4x + \sqrt{|x|})\frac{\pi}{2}]$

$f_3 : x \rightsquigarrow \sin[(2x + \sqrt{|x|})\frac{\pi}{2}]$

$f_4 : x \rightsquigarrow \sin\left(\frac{x^6+1}{x^2+1} \cdot \pi\right)$

2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante (C_2) portant sur f pour que le nombre F(2) existe. Comparer les deux conditions (C_1) et (C_2). Etudier les exemples f_2 et f_3 précédents.

3°) a) Soit p un entier donné (p > 1) ; trouver une condition nécessaire et suffisante (C_p) pour que F(p) existe.

.../...

b) Soit p un entier naturel ; p = 0,1,2... ; préciser F(0).

En supposant que la condition (C_1) est vérifiée, calculer F(p + 1) - F(p) en utilisant f.

Quelle est la limite de F(p + 1) - F(p) lorsque l'entier p tend vers + ∞ ?

4°) On suppose que la série de terme général f(n) est convergente. Soit S sa somme :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) .$$

Montrer que F(p) existe quel que soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la série de terme général F(p + 1) - F(p) est convergente. Calculer au moyen de S sa somme :

$$\sum_{p=0}^{\infty} (F(p+1) - F(p))$$

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, on suppose f continûment dérivable dans $\mathbb{R}^*$ et telle qu'il existe trois constantes N, K, α (N entier ⩾ 1, K réel > 0, α réel > 1) telles que :

$$\forall x \geqslant N \quad |f'(x)| \leqslant \frac{K}{x^{\alpha}}$$

1°) Soit x un réel fixé distinct d'un entier négatif.

a) En utilisant une majoration de $|f(x+n) - f(n)|$ pour n assez grand, montrer que la fonction F est définie pour tout x réel différent d'un entier relatif strictement négatif.

b) Que peut-on en déduire pour f(p) lorsque p entier tend vers + ∞ ?

Est-ce que f(x) admet une limite lorsque x tend vers + ∞ ?

2°) Soient deux réels fixés x et x' tous deux strictement positifs.

On pose :

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{n=N} [f(x+n) - f(n)]$$

le nombre N étant celui défini précédemment.

a) Montrer l'inégalité suivante

$$|S_N(x) - S_N(x')| \leqslant N A |x - x'|$$

où $A = \text{Sup} \{ |f'(y)| \mid y \in [1, +\infty[\}$. (On commencera par démontrer l'existence de cette borne supérieure).

b) Montrer une inégalité du même type pour la somme :

$$\sum_{N+1}^{\infty} [f(x+n) - f(x'+n)]$$

et en déduire qu'il existe une constante L telle que :

$$| F(x) - F(x') | \leqslant L |x - x'|$$

c) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-ce que F est continue à droite au point x = 0 ?

.../...

3°) Soit de nouveau x un réel fixé distinct d'un entier négatif.

a) Calculer $F(x+1) - F(x)$ en utilisant f et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire la continuité de F sur]-1,0] puis sur l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers strictement négatifs.

b) En reprenant brièvement les résultats de la question 2°) précédente, montrer que $\lim_{x \to -1} [F(x) - f(1+x)]$ existe ; exprimer cette limite au moyen de la somme d'une série convergente.

c) Montrer, plus généralement que $\lim_{x \to -p} [F(x) - f(x+p)]$ existe lorsque p est un entier strictement positif ; exprimer cette limite au moyen de la somme d'une série convergente.

4°) On suppose, dans cette question, que f est impaire et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On définit alors G sur l'ensemble des réels différents d'un entier relatif :

$$G(x) = F(x) - F(-x) + f(x).$$

a) Montrer que G est impaire périodique de période 1.

b) Déduire des résultats précédents que pour tout entier naturel p, p = 0,1,2,..., l'expression $G(x) - f(x+p)$ tend vers zéro lorsque x tend vers -p.

c) Déduire de ce résultat et de ceux de la question précédente, la somme de la série :

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} [f(p+n) - f(-p+n)]$$

pour tout entier relatif p différent de 0.

5°) Applications : Déterminer les sommes s_1, s_2, s_3 des séries suivantes, après avoir montré leur convergence :

- $s_1 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$ p entier donné $\neq 0$
- $s_2 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n+p}} - \frac{\varepsilon(n-p)}{\sqrt{|n-p|}} \right]$ p entier donné > 0 ; $\varepsilon(n-p)$ étant le signe de $n-p$.
- $s_3 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2}$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail